۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$A^{۲} + ۲A = \overline{O} \Rightarrow A^{۲} = -۲A$$

$$(A + I)(-۳A - ۲I) = -۳A^{۲} - ۲AI - ۳IA - ۲I.I = ۶A - ۲A - ۳A - ۲I = A - ۲I$$

۲- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$A^{۲} = A.A = \begin{bmatrix}۷ & -۸\\ ۶ & -۷\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}۷ & -۸\\ ۶ & -۷\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix} = I_{۲}$$

$$A^{۳} = A^{۲}.A = I_{۲}.A = A$$

$$\Rightarrow A^{n} = \begin{cases} I_{۲} & \text{n زوج باشد} \\ A & \text{n فرد باشد}\end{cases} \Rightarrow A^{۴} - A^{۱۱} = \begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}۷ & -۸\\ ۶ & -۷\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-۶ & ۸\\ -۶ & ۸\end{bmatrix}$$

نکته درسی:

۱) قاعده‌ی ضرب ماتریس‌ها

۲) $A_{n\times n} \times I_{n} = I_{n} \times A_{n\times n} = A_{n\times n}$

۳- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$AX = C \Rightarrow X = A^{-۱}.C \Rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-۲ & -۳\\ ۰ & ۵\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}۲\\ m\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}۴\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-۴ - ۳m\\ ۵m\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴ = -۴ - ۳m \Rightarrow m = \frac{-۸}{۳} \\ y = ۵m \Rightarrow y = \frac{-۴۰}{۳}\end{cases}$$

۴- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$-۲\begin{cases}۴x + ۳y = -۱\\ ۸x + ۷y = ۳\end{cases} \Rightarrow y = ۵\,,\ x = -۴ \Rightarrow -۲۰ - ۲۰ + a = ۰ \Rightarrow a = ۴۰$$

۵- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. دو طرف رابطه داده شده را در $A^{-۱}$ ضرب می‌کنیم:

$$A^{۲} = ۳A + I \xrightarrow{\times A^{-۱}} A^{-۱}A^{۲} = A^{-۱}(۳A + I) \rightarrow A = ۳I + A^{-۱} \rightarrow A - A^{-۱} = ۳I \rightarrow |A - A^{-۱}| = ۹$$

توجه شود که چون A یک ماتریس ۲ × ۲ است لذا I نیز ۲ × ۲ بود و دترمینان ماتریس ۳I برابر ۹ خواهد بود چون:

$$۳I = \begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}$$

۶- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$AB = \begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۵ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۲ & ۱\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-۴ & -۱\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}$$

$$۱۱\,(A.B)^{-۱} = ۱۱ \times \frac{۱}{-۱۱}\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ -۱ & -۴\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-۳ & -۱\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}$$

۷- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$AXA = I \Rightarrow A^{-۱}(AXA) = A^{-۱}I \Rightarrow \underbrace{(A^{-۱}A)}_{I}XA = A^{-۱}$$

$$\Rightarrow X.A = A^{-۱} \Rightarrow (XA)A^{-۱} = A^{-۱}.A^{-۱} \Rightarrow X\underbrace{(A.A^{-۱})}_{I} = A^{-۱}.A^{-۱} \Rightarrow X = (A^{-۱})^{۲}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{۱}{-۸ + ۶}\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ -۲ & -۲\end{bmatrix}\right)^{۲}$$

$$X = \frac{۱}{۴}\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ -۲ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ -۲ & -۲\end{bmatrix} = \frac{۱}{۴}\begin{bmatrix}۱۰ & ۶\\ -۴ & -۲\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{۵}{۲} & \frac{۳}{۲}\\ -۱ & -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$$

توجه / $A = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{ad - bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$

۸- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. طرفین رابطه ماتریس $AX = ۳A - ۲I$ را در ماتریس $A^{-۱}$ از چپ ضرب می‌کنیم.
$X = ۳I - ۲A^{-۱}$ ماتریس $A^{-۱}$ را محاسبه می‌کنیم. $A^{-۱} = -\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۸ & -۷\\ -۶ & ۵\end{bmatrix}$

$$X = \begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۰ & ۳\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}۸ & -۷\\ -۶ & ۵\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۱۱ & -۷\\ -۶ & ۸\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس X به‌صورت ۶ = ۸ + ۶- ۷ - ۱۱ می‌باشد.

۹- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. دستگاه زمانی جواب ندارد که دترمینان ماتریس ضریب‌ها صفر شود:

$$\begin{vmatrix}۱ & a+۱\\ ۴ & a-۲\end{vmatrix} = ۱\,(a-۲) - ۴(a+۱) = a-۲-۴a-۴ = -۳a-۶ = ۰ \Rightarrow a = -۲$$

۱۰- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. در دستگاه معادلات $\begin{cases}ax - ۳y = ۷\\ bx + ۴y = ۲\end{cases}$ اگر دترمینال ماتریس ضرایب مجهولات برابر ۱۷ باشد، مقدار x از روش کرامر برابر است با:

$$x = \frac{\begin{vmatrix}۷ & -۳\\ ۲ & ۴\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & -۳\\ b & ۴\end{vmatrix}} = \frac{۷\times ۴ - ۲\times(-۳)}{\text{دترمینال ماتریس ضرایب مجهولات}} = \frac{۲۸ + ۶}{۱۷} = ۲$$

توجه: یادآوری می‌شود که طبق دستور کرامر داریم:

$$\begin{cases}ax + by = c\\ a'x + b'y = c'\end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix}c & b\\ c' & b'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}}\,,\ y = \frac{\begin{vmatrix}a & c\\ a' & c'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}}$$

۱۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$F_1 = \frac{kq_1q_2}{r^2} = \frac{8kq_2}{r^2}$$

$$F_2 = \frac{kq'_1q'_2}{r^2} \Rightarrow F_2 = \frac{k6(q_2+2)}{r^2}$$

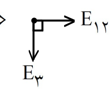
$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\cancel{k}\times 6(q_2+2)}{\cancel{k}\times 8(q_2)} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}_{2}} \times \frac{q_2+2}{q_2} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}_{1}} \Rightarrow q_2 + 2 = 2q_2 \Rightarrow q_2 =$$

۱۲- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. بزرگی میدان‌های حاصل از بارهای q و -q در نقطه‌ی M باهم برابر است و جهت هر دو به‌سمت راست است و فاصله‌ی بارهای q و -q تا نقطه‌ی M برابر $\frac{d\sqrt{2}}{2}$ است و اگر میدان بار q را E_1 و میدان حاصل از -q را E_2 فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$E_1 = E_2 = \frac{kq}{r^2} = \frac{kq}{\left(\frac{d\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{4kq}{2d^2} \Rightarrow E_1 + E_2 = \frac{4kq}{d^2}$$

فاصله‌ی بار الکتریکی 2q تا M برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}d$ است و اگر میدان حاصل از بار 2q را E_3 فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$E_3 = \frac{k(2q)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}d\right)^2} = \frac{2kq}{\frac{d^2}{2}} = \frac{4kq}{d^2} \Rightarrow$$



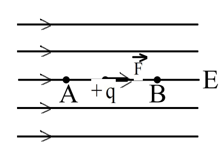
$$|E_{12}| = |E_3| = \frac{4kq}{d^2}$$

و اگر به‌جای k، معادل آن $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ بگذاریم، خواهیم داشت:

$$E_T = \frac{\sqrt{2}q}{\pi\varepsilon_0 d^2} \Rightarrow E_T = 2E_3\cos\frac{\theta}{2} \xrightarrow{\theta = 90} \sqrt{2}E_3 = \frac{\sqrt{2}q}{\pi\varepsilon_0 d^2}$$

۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$V_B = V_A - E.AB \Rightarrow V_B = V_A - 3000\times 2\times 10^{-2} \Rightarrow V_A - V_B = 60\ (V)$$



رابطه‌ی مورد استفاده در حل این مسأله به شکل زیر به دست می‌آید.

فرض کنیم بار +q در امتداد خط AB در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ از A به B منتقل شود. خواهیم داشت:

$$V_B - V_A = \frac{-W_E}{q} = \frac{-F\times \Delta x + 1}{q} = \frac{-qE\times AB}{q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_B - V_A = -E.AB$$

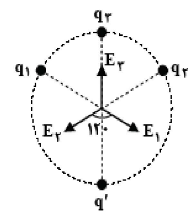
۱۴- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$E = \frac{kq}{r^2}$$

$$E_1 = E_2 = \frac{9\times 10^9\times 4\times 10^{-6}}{0/01} = 36\times 10^5\frac{N}{C}\ ,\ E_3 = \frac{9\times 10^9\times 10^{-6}}{0/01} = 9\times 10^5\left(\frac{N}{C}\right)$$

$$E_{1,2} = 2E_1\cos\frac{120}{2} \Rightarrow E_{1,2} = 2\times 36\times 10^5\times \frac{1}{2} = 36\times 10^5\left(\frac{N}{C}\right)$$

$$E_{1,2} > E_3 \Rightarrow q' > 0 \Rightarrow E_3 + E' = E_{1,2}$$



$$\Rightarrow E' = \frac{kq'}{r^2} = (36 - 9)\times 10^5 \Rightarrow \frac{9\times 10^9\times q'}{0/01} = 27\times 10^5$$

$$\Rightarrow\ q' = 3\times 10^{-6}\ C = 3\mu C$$

۱۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. از A تا B تراکم خطوط میدان بیشتر می‌شود، پس اندازه‌ی میدان الکتریکی افزایش می‌یابد. در جهت میدان حرکت می‌کنیم، پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد. تغییر انرژی پتانسیل بار q از رابطه‌ی $\Delta U = q.\Delta V$ به دست می‌آید. در این مورد q و ΔV هر دو منفی است. پس ΔU مثبت است. بنابراین، انرژی الکتریکی افزایش می‌یابد.

۱۶- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. اگر ضلع مربع $a = \sqrt{2}$ باشد، فاصله‌ی q_4 از هر کدام از بارها، نصف قطر مربع یعنی برابر با $\frac{1}{2}\sqrt{2}a$ خواهد شد. پس این فاصله برابر با $r = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\times\sqrt{2}\right)m$ خواهد شد.

$$F_{14} = F_{34} = \frac{K\,abs(q_1q_4)}{r^2} = \frac{9\times 10^9\times 10^{-5}\times 10^{-5}}{1^2}N = 0/9N$$

بنابراین بزرگی برایند نیروهایی که از q_1 و q_3 بر q_4 وارد می‌شوند برابر با $(2\times 0/9)N = 1/8N$ خواهد شد. بار q_2 به تنهایی نیرویی به‌اندازه‌ی $F_{24} = 1/8N$ بر بار q_4 وارد می‌کند. این دو نیروی ۱۸ نیوتونی بر هم عمودند، پس بزرگی برایند آن‌ها $1/8\sqrt{2}$ خواهد شد.

۱۷- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\sigma = \frac{q}{A} \Rightarrow q = 8\,.\,\sigma = 4\pi R^2\times\sigma = 4\times 3\times (0/5)^2\times 320\times 10^{-6} = 4\times 3\times 0/25\times 320\times 10^{-6}$$

$$= 960\times 10^{-6}C$$

نصف این بار به کره‌ی دیگر داده می‌شود (کره‌ها مشابه‌اند).

$$q = ne \Rightarrow 480\times 10^{-6} = n\times 1/6\times 10^{-19} \Rightarrow n = \frac{480\times 10^{-6}}{1/6\times 10^{-19}} = 3\times 10^{15}$$

۱۸- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

(کار نیروی میدان الکتریکی) - = اختلاف انرژی پتانسیل الکتریکی

$$q\ (\Delta V) = -W_E \Rightarrow \left(-8\times 10^{-6}\right)\left(V_B - V_A\right) = -\left(32\times 10^{-6}\right)$$

$$\Rightarrow 8\ (V_B - V_A) = 32 \Rightarrow V_B - V_A = \frac{32}{8} = 4$$

$$\Rightarrow V_5 - 6 = 4 \Rightarrow V_B = 6 + 4 = 10 \Rightarrow V_B = 10$$ ولت

۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$m_A = ۲m_B \xrightarrow{\text{چگالی یکسان است}} l_A.A_A = ۲l_B A_B \xrightarrow{l_A = ۶l_B} ۶A_A = ۲A_B \Rightarrow A_A = \frac{۱}{۳}A_B$$

$$R = \rho\frac{l}{A} \xrightarrow[A_A = \frac{۱}{۳}A_B]{l_A = ۶l_B} R_A = ۱۸R_B$$

$$V = IR\ ,\ V_A = V_B \Rightarrow I_A = \frac{۱}{۱۸}I_B \Rightarrow I_B = ۱۸I_A$$

۲۰- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\Delta U + \Delta k = ۰ \Rightarrow \Delta U = -۸mJ \Rightarrow (V_B - V_A)q = -۸\times ۱۰^{-۳}$$

$$(V_B - V_A)\times(-۴\times ۱۰^{-۶}) = -۸\times ۱۰^{-۳} \Rightarrow V_B - V_A = ۲\times ۱۰^{۳}V = ۲kV$$

نکته: حرکت آزاد بار منفی در جهت افزایش پتانسیل است، پس $V_B - V_A$ مثبت خواهد بود.

تذکر: در این حل سؤال مقدار E و شکل مسأله استفاده نمی شود.